# Números Inteiros e Criptografia 2026-2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

Entregue todas as questões marcadas com * até
**14 de outubro às 7:59**

A entrega é pelo Google Drive, na pasta que você recebeu por e-mail. As listas podem ser entregues por grupos de até 4 alunos. Apenas 1 aluno do grupo deve submeter as respostas. Os nomes e DREs dos componentes do grupo devem estar indicados claramente.

***Questão 1.** Determine se existem naturais $x, y, z$ que satisfaçam a equação

$$12^x \cdot 50^3 \cdot 15^{-y} = 10^z \cdot 768.$$

*dica*: $768 = 2^8 \cdot 3$.

**Questão 2.**

**a.** Seja $k \geqslant 2$ um natural. Mostre que todos os números $k! + 2, k! + 3, \ldots, k! + k$ são compostos.

**b.** Refute a seguinte conjectura sobre a distribuição dos números primos dentre os naturais:

"existe um natural $m$ tal que, dentre quaisquer $m$ naturais consecutivos, sempre há pelo menos um primo".

***Questão 3.** Sejam $b_1$ e $b_2$ naturais primos entre si. Mostre que para qualquer $d \in \mathbb{N}$, temos: $d$ é um divisor de $b_1 b_2$ sse $d = \text{mdc}(d, b_1) \cdot \text{mdc}(d, b_2)$.

**Questão 4.** Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$. Prove que os primos que dividem $n!$ são exatamente os primos menores ou iguais a $n$.

**Questão 5.** Sejam $a, b \geqslant 2$ números naturais. Ao longo desta questão, suponha que as fatorações em primos de $a$ e $b$ são

$$a = \prod_{i=0}^{k} p_i^{e_i} \qquad e \qquad b = \prod_{j=0}^{\ell} q_j^{f_j}.$$

**a.** Em termos dessas fatorações, como podemos determinar se $a$ é um divisor de $b$ ou não? Em outras palavras, complete e prove a seguinte frase:

$$\text{“}a \mid b \quad \text{sse} \quad \ldots\text{”}$$

onde em “...” você deve apenas falar sobre as fatorações em primos de $a$ e $b$.

**b.** Qual a fatoração em primos de $a \cdot b$?

*** c.** Suponha que $a \mid b$ e que $\frac{b}{a} \geqslant 2$. Qual é a fatoração em primos de $\frac{b}{a}$?

**d.** Qual é a fatoração em primos de $\text{mdc}(a, b)$?

*** e.** Qual é a fatoração em primos de $a^2$?

*** f.** Dizemos que um número real $x$ é *racional* se existem inteiros $y, z$, com $z \neq 0$, tais que $y = x \cdot z$, ou em outras palavras, $x = \frac{y}{z}$. Se $x > 0$, podemos tomar $y, z > 0$ também. Prove o seguinte teorema.

> **Teorema.** *Para todo natural $n \geqslant 2$, temos:*
> *$\sqrt{n}$ é um número racional sse $\sqrt{n}$ é um número natural.*

*Dica para uma das direções*: Se $\sqrt{n} > 0$ é racional, então $\sqrt{n} = \frac{y}{z}$ para algum par de naturais não nulos $y, z$. Caso tenhamos $z = 1$, nada mais precisa ser provado. Senão, note que temos $n = \frac{y^2}{z^2}$. Pelo item (e), o que se sabe sobre as fatorações em primos de $y^2$ e $z^2$? Pelo item (c), o que isso implica sobre a fatoração em primos de $n$?

*** g.** Prove que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Você pode usar os seguintes fatos: $\sqrt{2}$ é um número real e, para quaisquer reais $x, y > 0$, se $x > y$ então $x^2 > y^2$.

**Questão 6.** Considere as seguintes funções definidas para naturais positivos:

- $\omega(n) =$ número de fatores primos de $n$ *distintos*.
- $\Omega(n) =$ número de fatores primos de $n$ *contando todas as repetições!*
- $d(n) =$ quantidade de divisores naturais de $n$.
- $S(n) =$ soma dos divisores naturais de $n$.
- $X(n) = n^{1234}$
- $Y(n) = 1234 \cdot n$

(A letra $\omega$ se chama “ômega minúsculo” e a letra $\Omega$ se chama “ômega maiúsculo”.)
Exemplos de valores das funções $\omega$, $\Omega$, $d$, $S$ estão dados na tabela abaixo:

| $n$ | fatoração em primos | $\omega(n)$ | $\Omega(n)$ | divisores naturais | $d(n)$ | $S(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 1, 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 1, 3 | 2 | 4 |
| 4 | $2^2$ | 1 | 2 | 1, 2, 4 | 3 | 7 |
| 8 | $2^3$ | 1 | 3 | 1, 2, 4, 8 | 4 | 15 |
| 15 | $3 \cdot 5$ | 2 | 2 | 1, 3, 5, 15 | 4 | 24 |
| 120 | $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ | 3 | 5 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 | 16 | 360 |

**Definição 1.** Dizemos que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é:

- *aditiva* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\text{se } \operatorname{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *completamente aditiva* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *multiplicativa* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\text{se } \operatorname{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

- *completamente multiplicativa* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

Para cada uma das funções $\omega$, $\Omega$, $d$, $S$, $X$ e $Y$ definidas acima, e para cada uma das propriedades *aditiva*, *completamente aditiva*, *multiplicativa* e *completamente multiplicativa*, diga se a função tem a propriedade ou não, provando cada caso positivo e dando um contra-exemplo para cada caso negativo. (*Dica:* poupe um bocado do seu trabalho: argumente que uma função ser *completamente aditiva* já implica que ela seja *aditiva* [também use a contrapositiva dessa implicação!], e analogamente para *completamente multiplicativa* e *multiplicativa*. Em um dos itens, pode ser útil usar a Questão 3 acima.)