



Lógica & Computabilidade 2025-1

Prova 3

16 de julho de 2025

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Justifique todas as suas respostas!

Lembrete de definições: Sejam $L \subseteq \Sigma^*$ linguagem e M máquina de Turing (abreviamos “MT”) com alfabeto de entrada Σ . Dizemos que...

- M *aceita* ou *reconhece* L se para todo $w \in \Sigma^*$ temos

$$w \in L \iff M \text{ aceita } w$$

- M *decide* L se para todo $w \in \Sigma^*$ temos

$$w \in L \implies M \text{ aceita } w$$

$$w \notin L \implies M \text{ rejeita } w \text{ (“termina em crash”)}$$

- L é *recursivamente enumerável* se é aceita por *alguma* MT
- L é *decidível* se é decidida por *alguma* MT

Questão 1 (1 ponto cada, máximo 3 pontos). **ESCOLHA EXATAMENTE TRÊS** das afirmações abaixo e prove ou disprove cada uma das que escolher, onde *linguagens* são sempre subconjuntos de um mesmo Σ^* .

- (i) A interseção de duas linguagens recursivamente enumeráveis é uma linguagem recursivamente enumerável.
- (ii) A interseção de duas linguagens decidíveis é uma linguagem decidível.
- (iii) A união de duas linguagens recursivamente enumeráveis é uma linguagem recursivamente enumerável.
- (iv) A união de duas linguagens decidíveis é uma linguagem decidível.
- (v) Dada uma linguagem recursivamente enumerável $L \subseteq \Sigma^*$, seu *complemento* $\Sigma^* \setminus L$ é uma linguagem recursivamente enumerável.
- (vi) Dada uma linguagem decidível $L \subseteq \Sigma^*$, seu *complemento* $\Sigma^* \setminus L$ é uma linguagem decidível.

Questão 2 (3 pontos). Prove que a linguagem abaixo é **decidível**:

$$\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{em } w, \text{ a quantidade de 0s é o dobro da quantidade de 1s}\}$$

Questão 3.

a (2 pontos). Prove que se $L \subseteq \Sigma^*$ é tal que

- L é recursivamente enumerável; e
- seu complemento $\Sigma^* \setminus L$ também é recursivamente enumerável,

então L é decidível.

b (2 pontos). Prove que a linguagem abaixo **não é recursivamente enumerável**, onde Σ_{MT} é o alfabeto da MT universal:

$$\{c \in \Sigma_{\text{MT}}^* \mid \underline{\text{se}} \ c \text{ codifica máquina } M \text{ e entrada } w \text{ para } M, \underline{\text{então}} \\ M \text{ não para quando executada com entrada } w\}$$