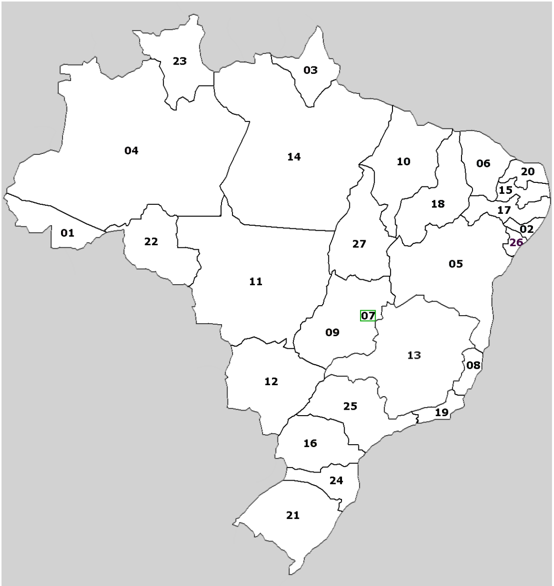
Questões A

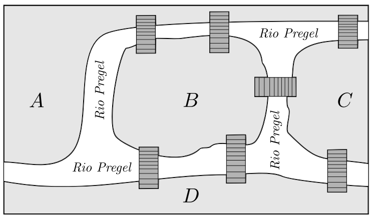
A.1 Colorindo mapas



Quando colorimos um mapa, usamos cores diferentes para colorir regiões adjacentes (ou seja, regiões que façam fronteira uma com a outra) para que seja fácil diferenciar visualmente as regiões. Em 1852, o matemático e botanista sul-africano Francis Guthrie conjecturou que qualquer mapa desenhado em uma folha poderia ser colorido usando no máximo 4 cores, sem que a regra acima fosse desrespeitada. Essa conjectura provou ser um <u>enorme</u> desafio para os matemáticos (apesar da afirmação de que *cinco* cores bastam ser razoavelmente fácil de ser provada); na verdade ela foi provada apenas em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken. A prova original de Appel e Haken reduz o problema à analise exaustiva de aproximadamente 2000 mapas, o que foi feito com o auxílio de um computador. Por este motivo, a prova foi considerada suspeita por grande parte da comunidade matemática. Entretanto, até hoje nenhum erro sério foi encontrado.

Encontre um conjunto de estados no mapa brasileiro que não possa ser colorido com menos do que 4 cores. Obs: TO (27) **faz** fronteira com PI (18) e DF (07) **faz** fronteira com MG (13), mas MA (10) **não faz** fronteira com BA (05).

A.2 As pontes de Königsberg



Na antiga cidade prussiana de Königsberg (hoje Kaliningrado, cidade russa que fica entre a Polônia e a Lituânia e que foi uma das sedes da Copa do Mundo de 2018), o rio Pregel cortava a cidade em quatro regiões distintas, conectadas entre si por 7 pontes conforme a figura ao lado. Teria sido possível, na época, começar em alguma das quatro regiões e, atravessando cada ponte exatamente uma vez, voltar ao ponto de início? Qual o menor conjunto de pontes que devem ser construídas ou destruídas para que a resposta a essa pergunta fosse diferente? O que acontece com essas respostas se *relaxarmos* a exigência de que o passeio comece e termine no mesmo ponto (ou seja, se exigirmos apenas que cada ponte seja atravessada exatamente uma vez)?

Questões B

B.1 A ponte e a lanterna

Em uma noite muito escura, quatro pessoas que caminham juntas chegam a uma ponte. Eles têm apenas uma lanterna, e a ponte comporta no máximo duas pessoas atravessando juntas de cada vez. Por causa do risco de queda da ponte, que é velha e cheia de buracos, é necessário usar a lanterna durante qualquer travessia. Entretanto, a lanterna não pode ser arremessada de um lado ao outro; ela deve ser transportada sempre por alguém. Para piorar a situação, as quatro pessoas têm ritmos de caminhada diferentes: a pessoa P_1 conseguiria atravessar a ponte sozinha em 1 minuto, a pessoa P_2 em 2 minutos, a pessoa P_5 em 5 minutos, e finalmente a pessoa P_{10} em 10 minutos. Quando um par de pessoas atravessa a ponte, o tempo de travessia é determinado pela pessoa mais lenta. Qual o mínimo de tempo necessário para que se complete a travessia das quatro pessoas? Como você poderia argumentar que esse é de fato o mínimo?

B.2 Ervilhas

Você comprou dez latas de ervilha, cada uma feita por um fabricante diferente. Em cada lata há 100 ervilhas. Em nove das dez latas, cada ervilha pesa exatamente 1g; na outra lata, as ervilhas são um pouco mais leves: cada uma pesa exatamente 0.9g. As latas estão abertas, mas visualmente todas as ervilhas de todas as latas são idênticas. Você tem à disposição uma balança eletrônica muito precisa, mas cuja bateria está acabando; a balança só vai poder ser usada para fazer uma única medição de 1 segundo de duração. Como você pode fazer para descobrir, sem nenhuma dúvida, a marca das ervilhas mais leves?

B.3 Cara ou coroa

Em uma mesa redonda com tampo giratório estão dispostas quatro moedas, formando um quadrado. Há uma venda sobre seus olhos e você não sabe quais moedas estão com "cara" ou "coroa" para cima, e além disso você está usando uma luva grossa que não permite distinguir os lados das moedas usando o tato. Você pode escolher trocar a face exposta de quaisquer moedas desejar, e então perguntar se elas estão todas com a mesma face ("cara" ou "coroa") para cima. Se estiverem, parabéns, você ganhou! Se não estiverem, você perde uma *vida*, a mesa é girada aleatoriamente, e você pode tentar novamente caso ainda tenha vidas disponíveis. Senão, você perdeu o jogo.

Com quantas vidas você deve começar o jogo, e qual estratégia deve adotar, para garantir que você consiga vencer o jogo mais cedo ou mais tarde? (Sim, essa questão tem solução!)

Questões C

C.1 Suspeitos

A polícia tem certeza de que um certo crime foi cometido por apenas uma pessoa, e que essa pessoa é o Hugo, o João, ou o Severino. Durante o interrogatório, as seguintes declarações foram feitas.

Hugo: Sou inocente.

João: Sou inocente.

Severino: O João é culpado.

Um tempo depois, descobriu-se que apenas uma dessas declarações era verdadeira. Quem cometeu o crime?

C.2 Soma e produto

Duas pessoas, S e P, estão conversando sobre dois números inteiros x e y, ambos maiores ou iguais a 2. S sabe o valor da soma $x+y$ e P sabe o valor do produto xy, mas no início da conversa nenhum dos dois sabe os valores de x e y. A conversa procede da seguinte forma:

S: Olá, P! Eu não sei quais são os números.

P: Oi, S! Eu já sabia que você não sabia. Eu também não sei ainda.

S: Ah, você ainda **não** sabe? Então agora eu sei!

P: Sendo assim, eu também já sei!

Quais são os números x e y?

C.3 Chapéus coloridos

Chapéus vermelhos ou verdes são colocados sobre as cabeças de três pessoas, de modo que cada pessoa consegue ver os chapéus dos outros, mas não o próprio. Cada pessoa sabe que sobre a sua cabeça há um chapéu verde ou vermelho. Pede-se que cada pessoa levante a mão caso veja algum chapéu vermelho, e que qualquer pessoa que consiga deduzir a cor do próprio chapéu se retire da sala imediatamente. Neste dia, os três chapéus colocados nas cabeças das pessoas são vermelhos, então todos levantam as mãos. Depois de um tempo, a mais esperta das pessoas sai da sala. Como ela descobriu a cor do próprio chapéu?

C.4 Selos coloridos

Três pessoas possuem raciocínio lógico perfeito (e as três sabem que as três possuem raciocínio lógico perfeito). Há quatro selos vermelhos e quatro verdes em uma mesa, e as três pessoas são informadas de que serão vendadas e que dois selos serão colados à testa de cada uma delas. Após a colagem, os selos que sobraram na mesa são removidos, e as vendas dos olhos das pessoas também são retiradas. Pergunta-se às pessoas se elas sabem as cores dos próprios selos, e elas respondem que não. A pergunta é repetida à primeira pessoa, que novamente responde que não. Agora a pergunta é repetida à segunda pessoa, que deste vez responde que sim. Quais as cores dos selos na testa desta segunda pessoa?

Questões D

D.1 Menores bêbados

Você é um policial e entra em um bar onde há suspeita de que menores de idade estejam consumindo bebida alcoólica. Você observa quatro pessoas

1. um senhor de idade bebendo algo que não conseguimos identificar;
2. uma pessoa de idade indeterminada tomando uma cerveja;

3. uma pessoa de idade indeterminada tomando um refrigerante (que não foi adulterado);
4. uma criança tomando uma bebida que não conseguimos identificar.

Quais pessoas você deve questionar, e quais perguntas deve fazer, para determinar se há algo irregular acontecendo?

D.2 Cartas coloridas

Em uma mesa há quatro cartas de baralho; uma mostrando um número 3, outra um número 8, uma outra colorida de azul, e a última colorida de vermelho. Alguém chega para você e diz:

> Sempre que a face de uma carta tem um número par, a face oposta é colorida de vermelho.

Qual o menor conjunto de cartas que você tem que virar para saber se a afirmação é verdadeira? Qual a relação entre essa questão e a questão D.1?

Questões E Mensagens secretas

As mensagens a seguir foram *encriptadas*: cada letra de cada mensagem original foi trocada por uma outra letra do alfabeto, seguindo sempre uma mesma regra simples (a mensagem da esquerda seguiu um regra, e a da direita uma outra regra um pouco menos simples). Explique que estratégia(s) você pode tentar usar para descobrir as mensagem originais, e se possível, de fato descubra as mensagens.

```
MJYQCHYKZCKTGLBMQYSDPHCQN
CPMOSCRCLFYKMQSKMRGKMNCPG
MBMHSLRMQCOSCYSLGTCPQGBYB
CQCHYRSBMMOSCTMACQBCQCHYK
```

```
MILMBQALYJAKAYCGHAZAMPAZFAZ
MTHMFAJMFQJACAFYCPAGAQWIMCM
FMKJYZMYFQJQPYZKAKMNFQAQGVA
QMIWIMZQGZMZNQAKQZNIKADQA
```

Questões F

F.1 Grupos de 3 e 5

Um professor pediu para os calouros da Computação se dividirem em grupos de 3 ou 5 alunos cada, e ele tinha plena confiança de que isso seria possível. Explique: por que ele tinha razão em ter essa confiança? Isso seria possível se em vez da turma, o grupo a ser dividido fossem todos os alunos da universidade? Note que se a turma tivesse apenas 7 alunos, isso *não* teria sido possível..!

F.2 Pesando moedas

Suponha que você tenha 3^n moedas (sendo n um número natural), idênticas, exceto que uma delas foi adulterada e pesa menos que as outras. Suponha também que você tenha uma balança de pratos, dessas que permitem apenas que você coloque algumas moedas em cada prato e veja se um dos lados ficou mais pesado que o outro ou não. Explique como você pode encontrar a moeda que pesa menos fazendo exatamente n pesagens desse tipo.